

# Gerçek Zamanlı “kuzey” Gerçek Zamanlı “g”

Özet

$XYZ$  : Uzayda sabit referans koordinat sistemi,

$xyz$  :  $XYZ$ 'ye göre dönen koordinat sistemi

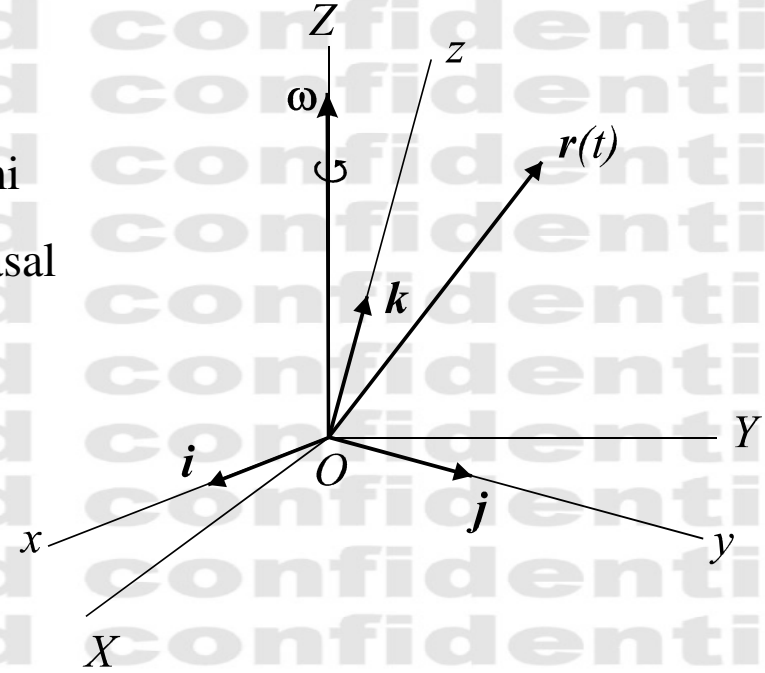
$r(t)$  :  $xyz$  koordinat sistemi içindeki noktasal bir parçacığın konum vektörü

Bu durumda, sabit  $XYZ$  sistemi, içindeki bir gözlemci için noktasal parçacığın hareketine yönelik aşağıdaki formül geçerlidir.:

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_F = \left. \frac{dr}{dt} \right|_M + \omega \times r$$

Bu formül Coriolis Teoremi olarak bilinir. Burada  $\omega$ ,  $xyz$  sisteminin  $XYZ$  sistemine göre açısal hızıdır ve  $xyz$  sistemindeki bileşenlerine göre aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\omega = \omega_1 \cdot \mathbf{i} + \omega_2 \cdot \mathbf{j} + \omega_3 \cdot \mathbf{k}$$

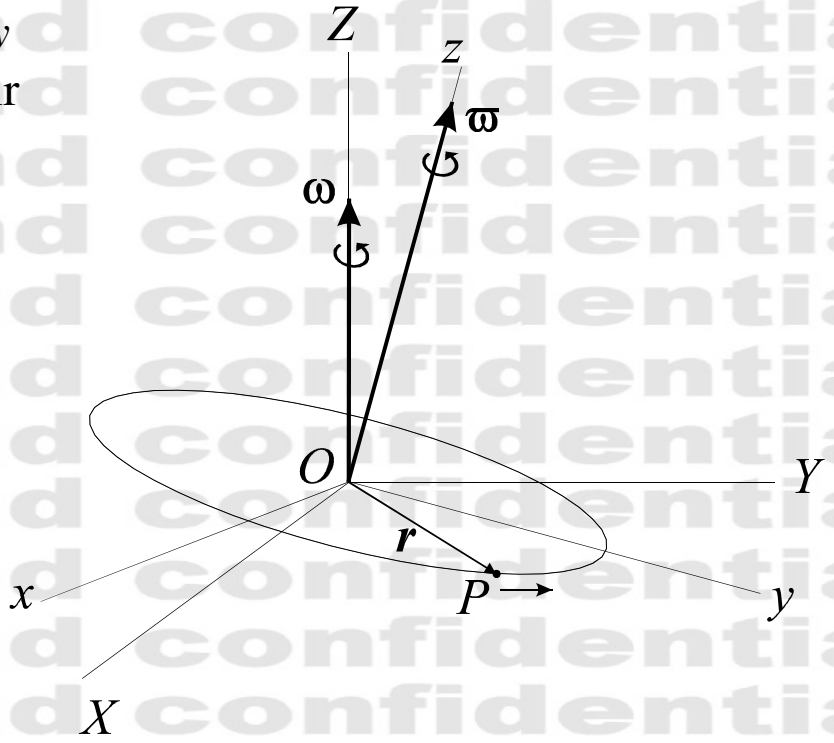


Noktasal parçacığın, xyz sistemi içinde xy düzlemi içinde  $\omega$  açısal hızı ile dairesel bir hareket yaptığını var sayalım. Parçacığın konum vektörünü, zaman domeninde ve xyz sistemi içinde aşağıdaki gibi ifade edebiliriz:

$$\mathbf{r} = r(\cos \omega t \cdot \mathbf{i} + \sin \omega t \cdot \mathbf{j})$$

Sabit XYZ sistemi içindeki gözlemci için parçacığın ivmesi (Coriolis Teoremini iki kez uygularsak) aşağıdaki gibi olacaktır:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{P/F} = & r \left\{ -((\omega + \omega_3)^2 + \omega_2^2) \cdot \cos \omega t + \omega_1 \omega_2 \sin \omega t \right\} \cdot \mathbf{i} \\ & + r \left\{ -((\omega + \omega_3)^2 + \omega_1^2) \cdot \sin \omega t + \omega_1 \omega_2 \cos \omega t \right\} \cdot \mathbf{j} \\ & + r \left\{ (2\omega \omega_2 + \omega_2 \omega_3) \cdot \sin \omega t + (2\omega \omega_1 + \omega_1 \omega_3) \cdot \cos \omega t \right\} \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$



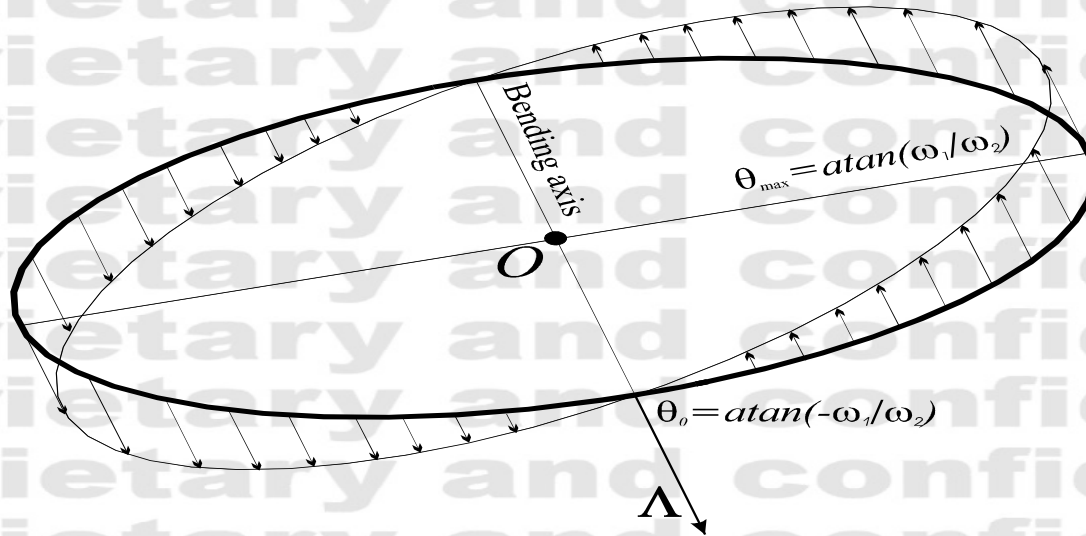
Eğer noktasal parçacık  $m$  kütlesine sahipse, Nevtun'un ikinci yasası gereği parçacık aşağıdaki gibi  $F$  kuvvetine hedef olacaktır:

$$F = m \cdot a_{P/F}$$

Bu kuvvetin  $i, j$  ve  $k$  doğrultusunda üç bileşeni bulunmaktadır. Bu  $xy$  düzleminde dönen parçacığın dengede olmadığı anlamına gelmektedir. Parçacık  $xy$  düzleminde dönerken onu düzlem dışına çıkartmaya zorlayan  $F_z$  bileşeni bulunmaktadır:

$$F_z = m \cdot r \{ (2\bar{\omega}\omega_2 + \omega_2\omega_3) \cdot \text{Sin}\bar{\omega}t + (2\bar{\omega}\omega_1 + \omega_1\omega_3) \cdot \text{Cos}\bar{\omega}t \} \cdot k$$

Bu kuvvet parçacık çember üzerinde dolaşırken aşağıdaki gibi gösterilebilir:



Bu kuvvet çember üzerinde  $\varpi t = \text{atan}(-\omega_1/\omega_2)$  noktalarında sıfırdır (bükülme eksenini).

Eğer  $\omega_1 = \omega_2 = 0$  -ki bu  $\omega$   $xy$  düzlemine dik demektir- veya  $\omega$ ,  $\varpi$ 'ye paralel demektir,  $F_z$  çember üzerindeki her noktada sıfır olacak ve parçacık düzlem dışına çıkmaya zorlanmadan sürekli  $xy$  düzlemi içinde kalacaktır. (kararlı durum).

Eğer  $\omega_1$  &  $\omega_2 \neq 0$  ise parçacık çember üzerinde dönerken kararlı olmayacak ve kararlı konuma erişmeye zorlanacaktır. (Kararlı konum çemberin dönme ekseninin  $\omega$  ile çakışması veya paralel olması).

Noktasal bir parçacık yerine  $xy$  düzleminde dönen bir tekerleği düşünersek daha önce kullandığımız Coriolis Teoremini dönen katı cisimlere aşağıdaki gibi uygulayabiliriz:

$$\left. \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \right|_F = \left. \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \right|_M + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{\Omega}$$

burada,  $\mathbf{\Omega}$  dönen katı cismin açısal momentumudur. Genel olarak açısal momentum, dönen katı cismin eylemsizlik momenti cinsinden aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\mathbf{\Omega} = I\boldsymbol{\omega}$$

Bu durumda Coriolis Teoremi:

$$\left. \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} \right|_F = \left. \frac{d(I\boldsymbol{\omega})}{dt} \right|_M + \boldsymbol{\omega} \times (I\boldsymbol{\omega})$$

Eğer  $\boldsymbol{\omega}$  sabit ise yani tekerlek sabit hızla dönüyorsa, eşitliğin sağ tarafındaki ilk terim sıfır olur. Eşitliğin sol tarafındaki ifade ise dönen katı cisme uygulanan  $\mathcal{A}$  tork değeridir, yani:

$$\mathcal{A}|_F = \boldsymbol{\omega} \times (I\boldsymbol{\omega})$$

Uygulamamızda  $\boldsymbol{\omega} = \omega \cdot \mathbf{z}$ , tekerleğin kütlesi ve yarıçapı sıra ile  $m$  ve  $r$  ise:

$$\mathcal{A}|_F = m \cdot r^2 \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{z}$$

Görüldüğü gibi bu tork hem  $\boldsymbol{\omega}$  ve hem de  $\boldsymbol{\omega}$  (z-ekseni) ye dik konumdadır. Aynı miktarda tork oluşturabilecek eşdeğer  $F_{EB}$  bükme kuvveti tanımlanabilir.

Yukarıda belirtilen tork genliği aşağıdaki gibidir:

$$\mathcal{A}|_F = m \cdot r^2 \cdot \boldsymbol{\omega} \cdot \omega \cdot \sin\theta$$

Burada  $\theta$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  ile  $\boldsymbol{\omega}$  arasındaki açıdır.

$\omega$  : Dönen koordinat sistemin açısal hızı

$\varpi$  : tekerleğin açısal hızı

$A = I \cdot \omega \times \varpi$  burada:

$I$  : tekerleğin eylemsizlik momenti

$A \perp \omega$  ve  $A \perp \varpi$

$I = m \cdot r^2$

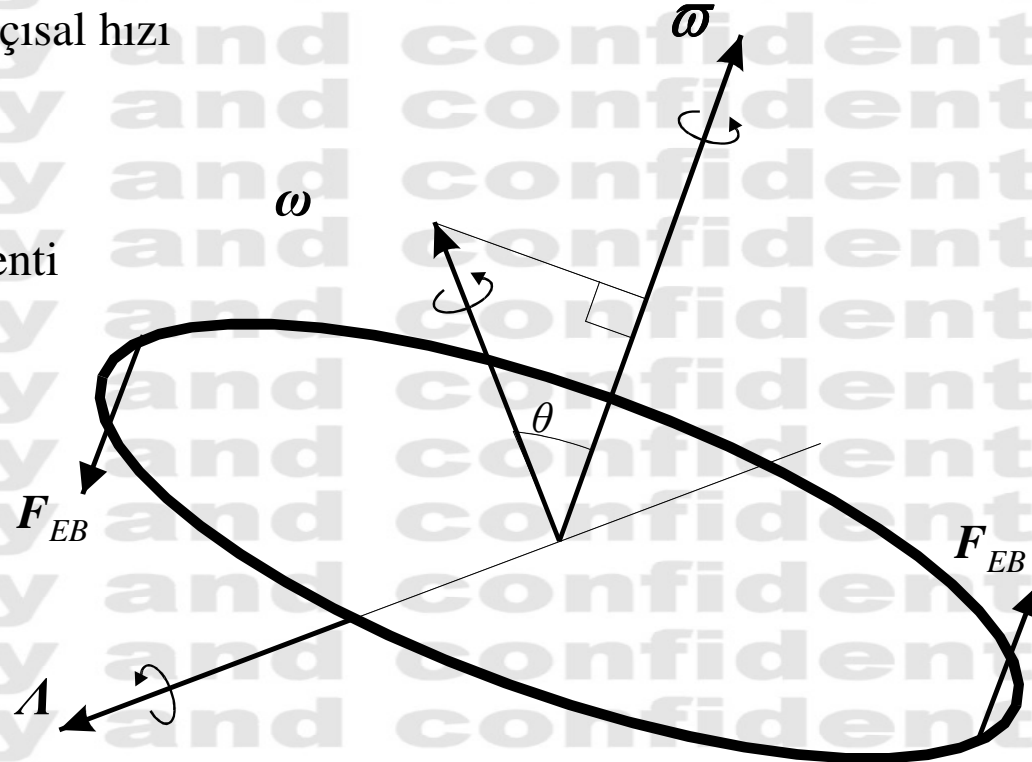
$$A|_F = m \cdot r^2 \cdot \varpi \cdot \omega \cdot \sin \theta$$

(tekerleğe uygulanan tork genliği)

Eğer  $\theta = 0$  olursa ( $\omega$  ve  $\varpi$  paralel olursa veya çakışırsa),  $A = 0$  olur,  $\theta = 90^\circ$  olduğunda ise  $A$  en büyük değeri alır.

$F_{EB}$  : eşdeğer tork üreten etkin bükme kuvveti. Bunun genliği:

$$F_{EB} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot r \cdot \varpi \cdot \omega \cdot \sin \theta$$



$A|_F = m \cdot r^2 \cdot \bar{\omega} \cdot \omega \times z$  Eşitliği  $\omega$ 'nın bileşenleri cinsinden:

$A|_F = m \cdot r^2 \bar{\omega} \cdot (\omega_2 \cdot i - \omega_1 \cdot j)$  Şeklinde ifade edilebilir.

Böylece dönen tekerleğin etki altında kaldığı tork ve eşdeğer etkin bükme kuvveti genliği aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$A = mr^2 \bar{\omega} \sqrt{\omega^2 - \omega_3^2}$$

$$F_{EB} = \frac{mr\bar{\omega}}{2} \sqrt{\omega^2 - \omega_3^2}$$



Sabit ve dönen koordinat sistemleri aynı orijine sahip olmayabilir. Ancak orijinler arası sabit ise tüm hesaplamalar aynen geçerli olur.

Dünya yüzeyinde dönen tekerlekte oluşan bükülme kuvveti bazı uygulamalarda kullanılabilir.

Jiroskopların çalışma prensibi budur.

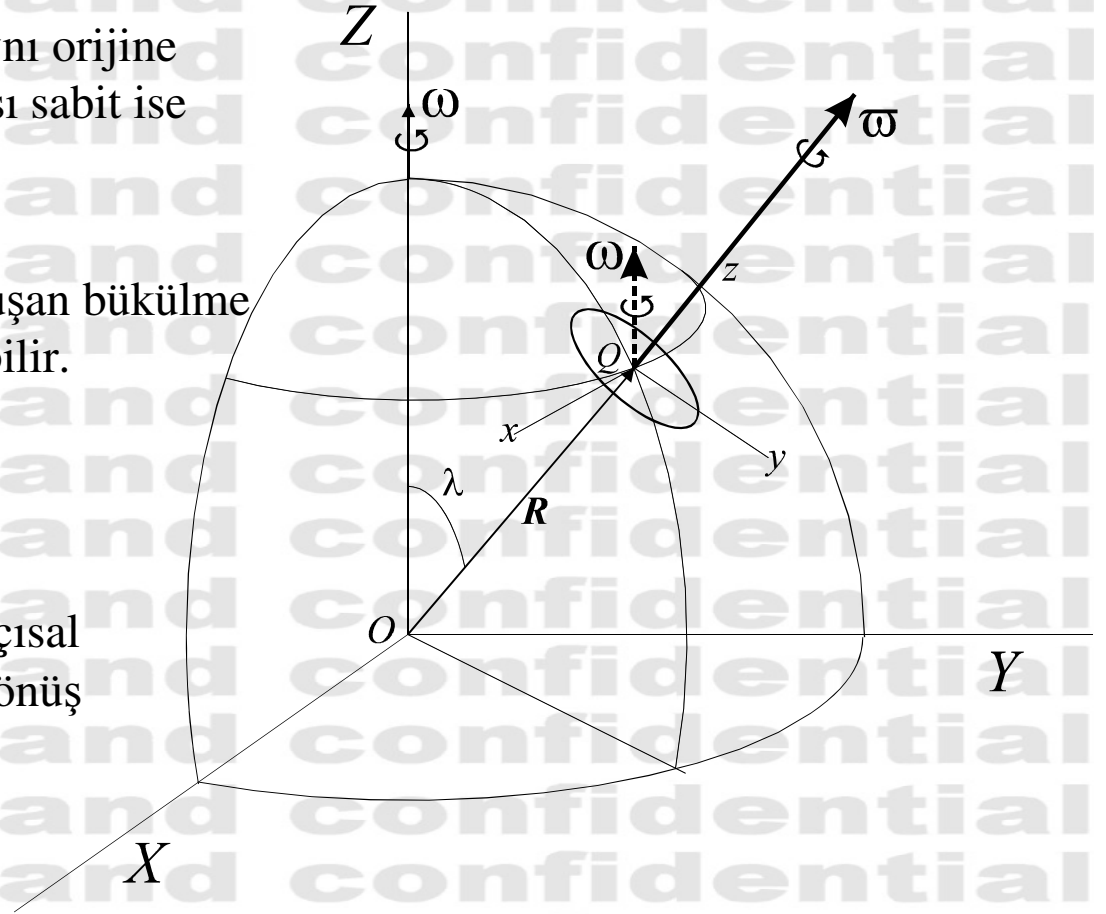
Şekilde,  $\omega$  dünyamızın açısal dönüş hızıdır. Serbestçe dönen tekerleğin açısal dönüş hızı  $\omega$  ise, tekerlek ancak iki dönüş ekseninin paralel olması durumunda kararlı olabilir. Resimde:

$O$  : Dünyanın merkezi

$Q$  : Ölçüm noktası

$OQ$  : Sabit

$\lambda$  açısı: Ölçüm noktasının enleminin tümler açısı.





Bükülme eksenini her iki birim vektöre dik olduğundan,  $\mathbf{u}_B$  bükülme eksenindeki birim vektör:

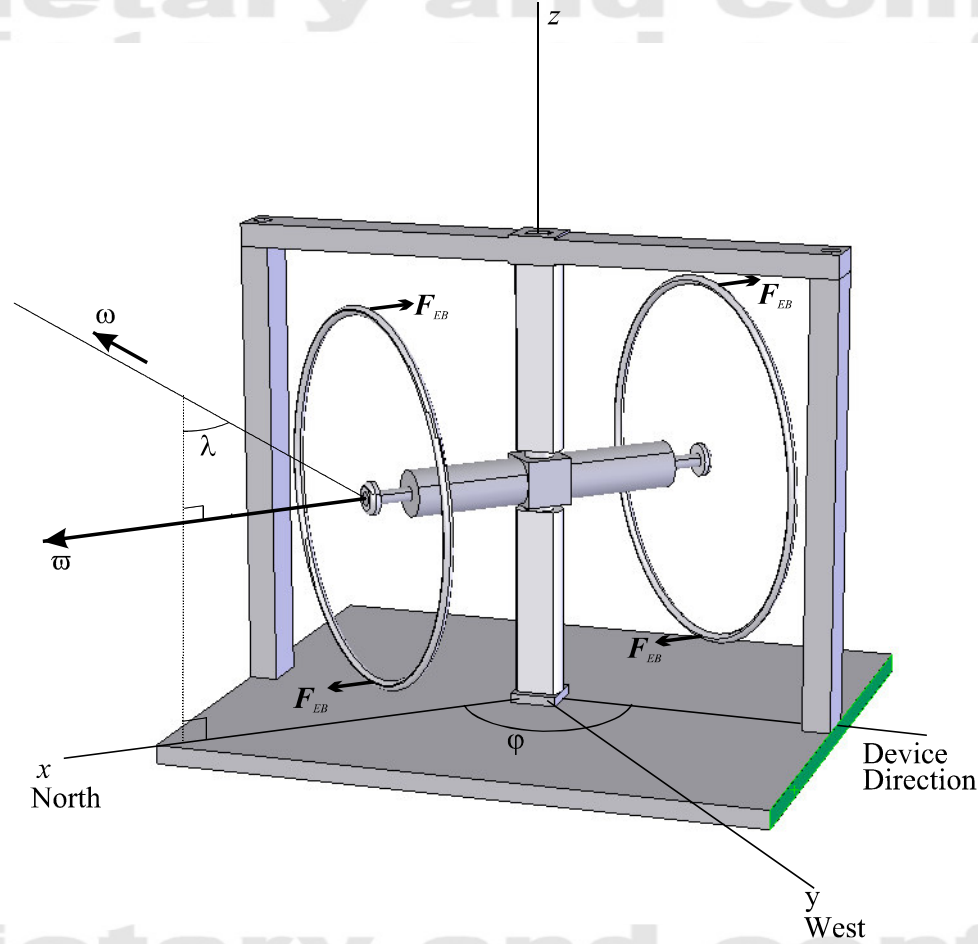
$$\mathbf{u}_B = \frac{\mathbf{u}_R \times \mathbf{u}_w}{|\mathbf{u}_R \times \mathbf{u}_w|}$$

$\Lambda$  torkun da  $\mathbf{u}_B$  doğrultusunda olduğu göz önüne alınırsa 8. sayfadaki formülleri kullanarak tekerleği  $O$  dönme noktası etrafında yatay yönde döndürecek tork bileşeni değeri sıra ile aşağıdaki gibi bulunur.

$$\Lambda_z = -m_w r^2 \omega \bar{\omega} \cdot \sin \lambda \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

- Bu bileşenin en büyük olduğu durum  $\theta=90^\circ$  durumudur. Yani tekerleğin yatay olarak etkin bir şekilde yer değiştirmesi için tekerlek dönme eksenini yatay olmak durumundadır.
- Yatay ekseninde  $\varphi=0^\circ$  (doğu-batı) konumu torkun en büyük olduğu konum,  $\varphi=\pm 90^\circ$  konumu ise (kuzey-güney) doğrultusu torkun sıfır olduğu konumdur
- Tork değeri yer yüzünde ekvatora gittikçe etkinleşecek, kutuplara gittikçe etkinliğini kaybedecektir.

Buna göre iki tekerlekli, simetrik yapıli kuzey bulucumuzun mimari yapısı aşağıdaki gibi olacaktır.



**Figure 15:** Symmetric Body North Finder in the North Direction

10. Sayfadan görüleceği gibi tekerleği yukarı doğru iten kuvvetin en büyük olması için  $\omega$  ve  $\varpi$  eksenlerinin aynı düşey düzlemde olmaları gerekir. Buna göre yerçekimi ivme ölçerimizi yandaki şekildeki gibi oluştururuz.

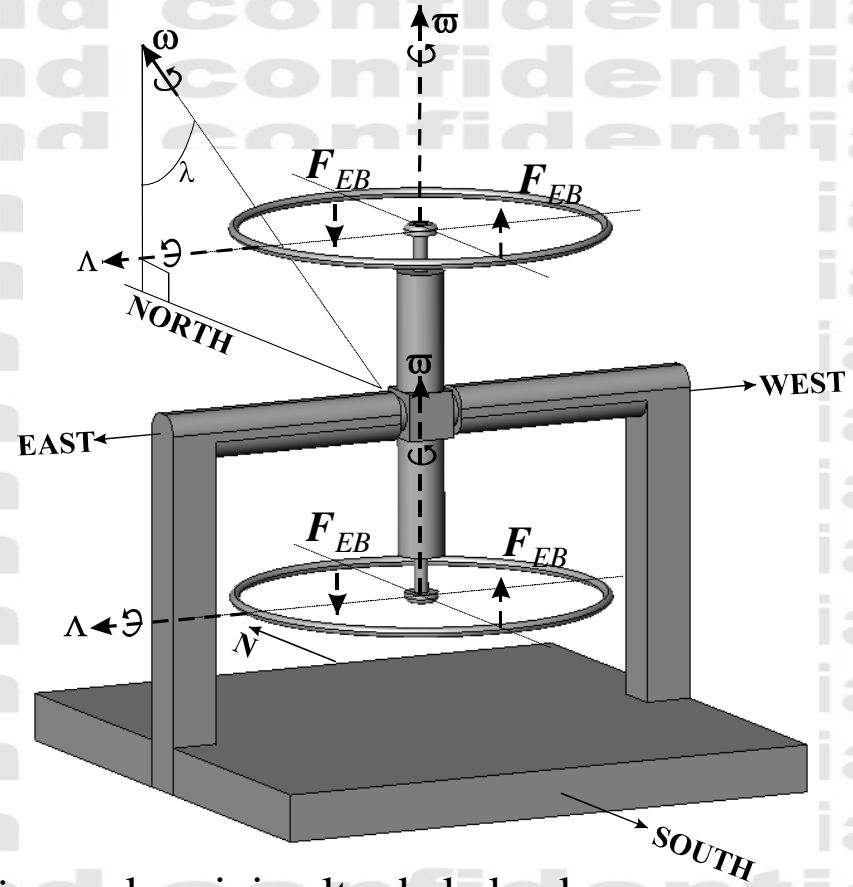
Burada  $\omega$  dünyanın dönme eksenine paralel referans doğrultusunu ifade eder.

Tekerlekler  $\varpi$  açısal hızıyla döner.  $\omega$  ve  $\varpi$  meridyen düzlemi içindedirler. Açısal hız  $\varpi$  dan dolayı oluşan tork düşey dönme eksenine paralel ve meridyen düzlemine diktir.

Başlangıçta,  $\varpi$  sıfır olup sistemin düşey dönme ekseninin altında kalan kısım yerçekimi ivmesi nedeniyle daha büyük tork değerine sahip olup sistem şekildeki biçimde dengeli konumdadır. Tekerlekler dönmeye başlayınca her bir tekerlekte aşağıda formüle edilen etkin bükme kuvveti oluşur:

$$F_{EB} = \frac{m_w r \omega}{2} \sin(\lambda \pm \theta)$$

Ahmet Yalçın - Ankara 2007  
www.realtimegravity.org



Burada  $\pm$  işareti tekerleklerin dönme yönüne göre etkin kuvvetin veya torkun yön değiştirmesi nedeniyle kullanılmıştır. Bu kuvvetle sistem konum değiştirecek tekerleklerin dönme hızına göre yanda **meridyen düzlemi**'nde görüldüğü kararlı konumu alacaktır.

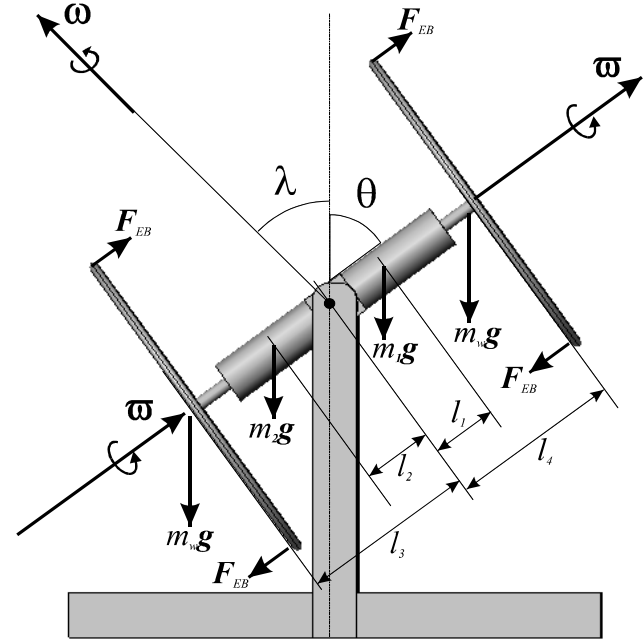
Burada sistem  $\theta$  açısı kadar yan yatarsa ve tekerleklerin yarıçaplarının  $r$  olduğu, sistemdeki diğer ağırlık ve uzunlukların da şekildeki gibi olduğu düşünülürse, denge durumunda aşağıdaki eşitlik geçerli olacaktır:

$$m_1 g \cdot l_1 \cdot \sin\theta + m_w g \cdot l_4 \cdot \sin\theta + 4 \cdot r \cdot F_{EB} = m_2 g \cdot l_2 \cdot \sin\theta + m_w g \cdot l_3 \cdot \sin\theta$$

Sayfa 13'te  $F_{EB}$  değeri yerine konursa şekildeki durumda ( $\omega$  ve  $\varpi$  arasındaki açı  $(\lambda + \theta)$  olması durumunda):

$$g = \frac{2m_w r^2 \omega \varpi}{m_2 l_2 - m_1 l_1 + m_w l_3 - m_w l_4} \cdot \frac{\sin(\lambda + \theta)}{\sin\theta}$$

Tekerlekler ters dönerse bu formülde sadece  $(\lambda + \theta)$ ,  $(\lambda - \theta)$  olacaktır.



Tekerleklerin açısal hızı dakikada dönme sayısı cinsinden  $\omega = (\pi/30).n$  şeklinde ifade edilebilir. Bu durumda fomül aşağıdaki gibi olur:

$$g = C \cdot n \cdot \frac{\text{Sin}(\lambda + \theta)}{\text{Sin}\theta}$$

Burada  $C$ ,  $\omega$  kere aygıt geometrisi ilgili parametre olup belli bir cihaz için sabit değerdedir. Bu nedenle mutlak yerçekimi ivme değeri  $g$  sadece  $n$  ve  $\theta$  açısının bir fonksiyonudur. Sistemdeki tekerlek hızı ve yatma açısı değeri ölçülerek yerçekimi ivmesi gerçek zamanda sürekli takip edilebilir.

Burada en iyi sonucu almak için sistemin hem  $n$  ve hem de  $\theta$ 'ya en duyarlı noktayı belirlememiz gerekiyor. Bu da  $g = C.n$  ve  $\text{Sin}(\lambda + \theta)/\text{Sin}\theta = 1$  olduğu noktadır. Bu da demektir ki çok hassa bir  $g$  değeri için motor hızı  $n = g/C$  ve  $\theta = (\pi - \lambda)/2$  olmalıdır. Bu en uygun çakışma noktası olup eğer motor ters yöne döndürülürse bu durumda ideal çalışma noktası  $n = g/C$  ve  $\theta = \lambda/2$  olacaktır.

Dönme eksenleri  $\omega$  ve  $\omega$  arasındaki açı büyüdükçe, etkin konum değiştirme kuvveti daha etkili olacaktır. Bu nedenle  $(n = g/C, \theta = (\pi - \lambda)/2)$  çalışma noktası  $(n = g/C, \theta = \lambda/2)$  noktasına göre daha duyarlı sonuç verecektir.

Aygıt bu haliyle ölçüm noktasının enlemini ölçmede de kullanılabilir (**içsel enlem algılayıcı**).

Ölçüm noktasında tekerlekleri farklı yönlere döndürerek iki kez  $g$  değerini ölçtüğümüzü düşünelim. Ölçüm değerleri sırasıyla  $(n_1, \theta_1)$  ve  $(n_2, \theta_2)$  noktalarında alınmış olsun. Eğer bu iki ölçüm arasında  $g$  ivme değerinde bir farklılık olmamışsa aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$C \cdot n_1 \cdot \frac{\sin(\lambda + \theta_1)}{\sin\theta_1} = C \cdot n_2 \cdot \frac{\sin(\lambda - \theta_2)}{\sin\theta_2}$$

Buradan : 
$$\lambda = \operatorname{atan}\left(\frac{(n_1 + n_2) \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\theta_2}{n_2 \cdot \sin\theta_1 \cdot \cos\theta_2 - n_1 \cdot \sin\theta_2 \cdot \cos\theta_1}\right)$$

Ölçüm noktasının enlem değeri bu açığı 90 dereceye tamamlayan açıdır.



## Uygulamalar

- Yön bulma,
- Navigasyon
- Sismoloji
- Yerçekimi ivme araştırmaları
- Eğitim

# Yön Bulma

- Manyetik pusula pek çok sivil ve askeri uygulamalar için yeterli duyarlı değildir ve manyetik ortamlardan etkilenirler
- Mekanik, fibre optik, ring lazer jiroskoplar ağır, hantal ve sivil amaçlar için oldukça pahalıdır.
- Yeni teknoloji, özellikle sivil amaçlı uygulamalar için, hafif, ekonomik ve gerçek zamanlı çalışması nedeniyle çok uygundur.
- Mühendislik, inşaat, arazi ölçüm uygulamaları (kadastral) devasa bir pazar demektir. Mutlak kuzeye göre ve duyarlı ölçümler işleri son derece kolaylaştırır.

# Navigasyon

- Gerçek zamanlı yön bilgisi, navigasyonu kolaylaştırır,
- Aygıt aracın gerçek zamanlı olarak, öne, yana eğimini (pitch, roll) ve ivmesini sürekli olarak vereceği için yakıt optimizasyonu veya hibrit araçlarda alternatif güç kaynaklarının devreye giriş çıkışı otomatik olarak belirlenebilir.
- Bir dönemeçte dönemeç keskinliği (yarıçapı) hesap edilebilir, savrulma olmaması için dönemeç eğimi veya hızın ne olması gerektiği otomatik ayarlanabilir.
- Arazi sınırları hatta yüzey şekilleri üç boyutlu olarak çıkartılabilir, yüzey alanı, hafriyat miktarı v.s. kolayca hesaplanabilir.

# Sismoloji

- Yeteri kadar duyarlı olunabilirse bir fay hattının tektonik hareketleri üç eksende gözlenebilir. Öne, yana ve yön sapmaları gözlenerek enerji birikimi için tahmin yapılabilir.
- Deprem öncesi hareketlilik anında büyük yeraltı su hareketleri olduğu bilinir. Bunun yerçekimi ivmesi üzerindeki sapmalarını gözlemlemek ilginç sismik veriler oluşturabilir.

# Yerçekimi ivme araştırmaları

- Yerçekimi ivme değişimi periyodik olarak gözlenerek göksel cisimlerin etkisi araştırılabilir.
- “Gel-git”ler veya sismolojik olguların yerçekimi ivme değişimi üzerindeki etkileri mükemmel bir araştırma konusu olabilir.
- Yeryüzüne dağılmış “g” gözlem istasyonlarından alınan eř zamanlı yerçekimi ivme değerlerinin işlenmesi çok önemli bilimsel sonuçlara yol açabilir.
- Güneř’in yer çekimi ivmesine olan etkisini gerçek zamanlı olarak gözlemlenerek kütle çekim alan hızı belirlenebilir. Bunun deneysel olarak saptanması modern fizik gelişiminde çok önemli bir köşe taşı olabilir.

# Eğitim

- Özellikle “g” ölçer aygıtı fizik, mekanik, coğrafya, yerbilimleri öğrenimi için hem lise hem de üniversite öğrencileri için mükemmel bir eğitim aracı olarak kullanılabilir.
- Laboratuvar ortamında, dünyanın döndüğünü, fiziksel olarak algılamasak da her noktada bir yön olgusunun olduğunu, oda içinde hangi paralelde bulunduğumuzun (ekvatora uzaklığımızın) bilinebileceğini gösterebilmek veya matematiksel olarak ispatlanan “coriolis teoremi” ni deneysel olarak gözlemlemek öğrenciler için çarpıcı, motive edici ve bilimi olan güveni artırıcı olabilir.

## Bir AR-GE çalışması olarak avantajları

- Tek konsept, birbirinden bağımsız iki ayrı çalışma. Tek bir proje kapsamında da yürütülebilir, iki bağımsız proje olarak ta
- Hem ticari ve hem de önemli bilimsel sonuçları olabilecek bir çalışma
- Hazır ürünlerle gerçekleştirme olanağı. Özel bir donanım geliştirme gereksinimi yok. Motor, konum veya eğim algılayıcıları temin kolaylığı
- Çok az sayılabilecek alt yapı yatırımı
- Bilimsel ve teknik olarak dış kaynak gereksinimi yok
- Bilimsel alandaki başarı, ticari alandaki başarısının teminatı olabilir.
- Kısa sürede sonuca ulaşabilme

# Gerçek Zamanlı “kuzey” ve “g” ölçer AR-GE çalışması

“kuzey” bulucu “g” Ölçer

“Kuzey Bulucu”  
özgün donanım

“g” Ölçer özgün  
donanım

Ortak donanım

Ortak yazılım

%80

%20

%20

“Kuzey Bulucu”  
özgün yazılım

“g” Ölçer özgün  
yazılım



# Gerçek Zamanlı “kuzey” ve “g” ölçer uygulama alanları

“kuzey” bulucu

“g” Ölçer

- “kuzey” bulucu (askeri-sivil)
- Navigasyon (askeri-sivil)
- Taşıt yakıt optimizasyonu,
- Taşıt güvenliği
- Kadastral uygulamalar
- İnşaat mühendisliği

S  
Y  
S  
M  
O  
L  
O  
J  
İ

- “Gravity” (kütle çekim alan) araştırmaları
- Eğitim uygulamaları
- Yer gözlem araştırmaları
- “Gravity” hızı ölçme uygulamaları
- Enlem algılayıcı